DS n° 4 - Corrigé.

Exercice 1A (*)

① $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \dfrac{3^n}{2^{2n+1}} = \dfrac{3^n}{2\times 2^{2n}} = \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

Or la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ est convergente donc $\sum_{n\geq 0}\frac{3^n}{2^{2n+1}}$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-3/4}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{2^{2n+1}} = 2}$$

$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n!}$ est convergente car $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}$ est convergente et

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} - 1 - 1$$

$$= \boxed{e-2}.$$

Série $\sum_{n\geq 0}(n^2+n)e^{-n}$. On s'intéresse aux sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(k^2+k)e^{-k} = \sum_{k=0}^{n}k^2e^{-k} + \sum_{k=0}^{n}ke^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(k^2-k)e^{-k} + 2\sum_{k=0}^{n}ke^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}k(k-1)\left(\frac{1}{e}\right)^k + 2\sum_{k=0}^{n}k\left(\frac{1}{e}\right)^k$$

$$= \left(\frac{1}{e}\right)^2\times\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\left(\frac{1}{e}\right)^{k-2} + \frac{2}{e}\sum_{k=0}^{n}k\left(\frac{1}{e}\right)^{k-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\left(\frac{1}{e}\right)^{k-2} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^3} = \frac{2e^3}{(e-1)^3}$$

et $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}k\left(\frac{1}{e}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2} = \frac{e^2}{(e-1)^2}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}S_n = \frac{2e}{(e-1)^3} + \frac{2e}{(e-1)^2}$$

$$= \frac{2e^2-2e+2e}{(e-1)^3} = \boxed{\frac{2e^2}{(e-1)^3}}$$

Exercice 1 A (*)

② $\forall n \geqslant 1 \quad \sqrt{n} \leqslant n$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n}$

Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann)

Par comparaison $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverge}}$

$\forall n \geqslant 1 \quad n^2+1 \geqslant n^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2+1} \leqslant \frac{1}{n^2}$

Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann)

Donc par comparaison $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+1} \text{ converge}}$

• On s'intéresse à $\sum_{n\geqslant 1} \frac{|(-1)^n|}{n^6} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^6}$. Cette série est convergente donc F converge absolument. donc $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^6} \text{ converge}}$.

Exercice 1 B (**)

On passe par les sommes partielles

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)2^{2k+1}}{5^k} = \sum_{k=1}^{n} 2\times k\times\left(\frac{4}{5}\right)^k + 2\times\left(\frac{4}{5}\right)^k$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4}{5}\right)^k + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4}{5}\right)^k + 2\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k - 1\right)$$

$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{1}{\left(1-\frac{4}{5}\right)^2} = 25$

et $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 5$

donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)2^{2n+1}}{5^n}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)2^{2n+1}}{5^n} = 2\times 25 + 2\times(5-1) = \boxed{58}.$$

Ⓑ $\sum_{k=1}^{n} \frac{(1/9)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1/9)^k}{k!} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{1/9} - 1.$

Ⓒ $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 3^k e^{-3}}{k!} = e^{-3}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-k}{k!}\times 3^k + e^{-3}\sum_{k=1}^{n} \frac{k\,3^k}{k!}$$

$$= e^{-3}\sum_{k=2}^{n} \frac{3^k}{(k-2)!} + e^{-3}\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{(k-1)!}$$

$$= e^{-3}\sum_{k=0}^{n-2} \frac{3^{k+2}}{k!} + e^{-3}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{3^{k+1}}{k!}$$

$$= e^{-3}\times 9\times\sum_{k=0}^{n-2} \frac{3^k}{k!} + 3e^{-3}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{3^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 9e^{-3}e^{3} + 3e^{-3}e^{3} = \boxed{12}$$

Extrait EML 2002.

(1) $$s_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$s_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

(2) On a $\forall\, k < n$ $$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(1+k)!\,(n-k)!}$$

et $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

$$= \frac{(k+1)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-k)\,n!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,(n-k+k+1)}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

Donc $\forall\,(k,n)$, $k<n$ on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

(3)
On a $$s_{k+1}(x) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n$$

et $$x s_k(x) + x s_{k+1}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n+1} + \sum_{n=k+1} \binom{n}{k+1} x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) x^{n+1} + \binom{k}{k} x^{k+1}$$

$$= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n+1}{k+1} x^{n+1} + x^{k+1}$$

En passant par les sommes partielles

$$\sum_{n=k+1}^{N} \binom{n+1}{k+1} x^{n+1} = \sum_{j=k+2}^{N+1} \binom{j}{k+1} x^j$$ Chgt de variable. $j = n+1$

Donc $$\sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n+1}{k+1} x^{n+1} = \sum_{n=k+2}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n$$

et donc $$x s_k(x) + x s_{k+1}(x) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n = x\, s_{k+1}(x).$$

<u>Par Récurrence</u> $\mathcal{P}_k : \left\{ \forall x \in [0;1[\quad S_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \right\}$.

On rappelle que d'après (3), $(1-x)S_{k+1}(x) = x\, S_k(x)$

$$\iff \quad S_{k+1}(x) = \frac{x}{1-x} S_k(x).$$

<u>Initialisation</u> : $S_0(x) = \dfrac{x^0}{(1-x)^1} = \dfrac{1}{1-x} \quad \forall x \in [0;1[$

<u>Hérédité</u> : On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie pour un certain rang k.

$$\begin{aligned} S_{k+1}(x) &= \frac{x}{1-x} S_k(x) \\ &= \frac{x}{1-x} \times \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \\ &= \frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0;1[\quad S_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Exercice 2A (*)

① (a) $g'(x) = 6x^2 - \frac{6}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{6x^3 - 6}{x}$

$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{6}{x}(x^3 - 1) \quad$ Or $x > 0$

On résout $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

Or le discriminant de $x^2 + x + 1$ est négatif donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $x^2+x+1>0$

* Tableau de signe :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

(b) $g(x) = 2x^3\left(1 - \frac{3\ln(x)}{x^3} + \frac{3}{2x^3}\right)$ Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{2x^3} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3\ln(x)}{x^3} = 0$ par c.c.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

• $\lim\limits_{x\to0} 2x^3 = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^>} -6\ln(x) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^>} g(x) = +\infty}$

(c) Tableau de variations

x	0		1		$+\infty$
variations de g	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

(d) D'après le tableau de variation $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $g(x) > 0$.

② (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissance comparée donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x\to0^>} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^>} 3\ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^>} \frac{3\ln(x)}{x^2} = -\infty$

$\boxed{\lim\limits_{x\to0^>} f(x) = -\infty}$.

(b) $\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{3\ln(x)}{x^3}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$ donc $\boxed{a = 2 \text{ et } b = 0}$

2) (c) La droite d'équation $(\Delta) : y = 2x$ est asymptote à la courbe en $+\infty$

3) $$f'(x) = 2 + \frac{\frac{3}{x} \times x^2 - 2x \times 3\ln(x)}{x^4}$$

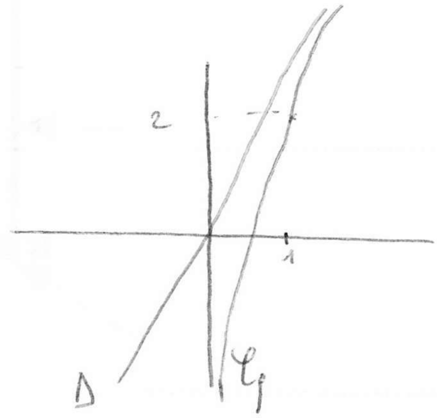
$$= \frac{2x^4 + 3x - 6x\ln(x)}{x^4} = \frac{2x^3 + 3 - 6\ln(x)}{x^3}$$

On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

(b) Or $\forall x > 0$, $x^3 > 0$ et $g(x) > 0$

On a donc $f'(x) > 0$.

x	0	$+\infty$
variation de f	$-\infty$	$+\infty$



4) (a) • f est continue en tant que somme et quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$

• $f(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$

• f est strictement croissante.

D'après le théorème de la bijection, l'équation (E_n) admet une unique solution.

(b) $f(1) = 2 \leq 2n$ et $f(n) = 2n + \frac{3\ln(n)}{n^2}$ Or $\frac{3\ln(n)}{n^2} \geq 0$

donc $f(n) \geq 2n$.

Ainsi, $2n \in f([1; n])$

Le théorème de la bijection dit alors que la solution de l'équation est comprise entre 1 et n $\boxed{1 \leq x_n \leq n.}$

(c) $f(x_n) = 2n \iff 2x_n + \frac{3\ln(x_n)}{x_n^2} = 2n$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\iff \frac{x_n}{n} + \frac{3\ln(x_n)}{2n\,x_n^2} = 1$$

$$\iff 1 - \frac{x_n}{n} = \frac{3\ln(x_n)}{2n\,x_n^2}$$

④ (d) $x_n \leq n$

donc $\ln(x_n) \leq \ln(n)$

d'un autre coté $x_n \geq 1$

$\Rightarrow \quad x_n^2 \geq 1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{x_n^2} \leq 1$.

donc $\forall n \geq 1$ $\quad 0 \leq \dfrac{\ln(x_n)}{n\, x_n^2} \leq \dfrac{\ln(n)}{n}$

(e) On a alors

$$\frac{3}{2} \times 0 \leq 1 - \frac{x_n}{n} \leq \frac{3}{2}\frac{\ln(n)}{n}.$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq 1 - \frac{x_n}{n} \leq \frac{3}{2}\frac{\ln(n)}{n}.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissance comparée.

Donc, en utilisant le théorème des gendarmes, on affirme que $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{x_n}{n} = 0$

ou $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_n}{n} = 1}$

Exercice 2B (**).

① Tableau de signe

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$	
$\frac{e^x-1}{x}$		$+$	$\|$	$+$	

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{e^x - 1}{x} > 0.$

② f est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ en tant que quotient de fonctions continue qui ne s'annule pas.

De même, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (taux d'accroissement)

et donc $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = 0$. De plus $f(0) = 0$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

③ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad f'(x) = \dfrac{e^x x - (e^x - 1)1}{x^2\left(\frac{e^x-1}{x}\right)} = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)}$

④(a) $\forall x \in \mathbb{R}, \; g'(x) = \cancel{e^x} + xe^x - e^x = xe^x.$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

(b) On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^*, \; g(x) > 0$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\quad x^2 > 0$ et $\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) > 0$ (question 1)

Donc f' est strictement positive.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad = +\infty$ (par croissance comparée).

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(6) $P_n : \{ u_n > 0 \}$

Initialisation : $u_0 > 0$ d'après l'énoncé

Hérédité : On suppose que $u_n > 0$ pour un certain rang n.

f est croissante donc $u_n > 0$

$$\Leftrightarrow f(u_n) > f(0)$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} > 0 .$$

(7) (a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - x = \begin{cases} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$f(-x) = 0$ si $x = 0$ et si $x \neq 0$,

$$f(-x) = \ln\left(\frac{e^{-x} - 1}{-x}\right) = \ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right)$$

$$= \ln\left(e^{-x}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)\right)$$

$$= \ln(e^{-x}) + \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

$$\boxed{f(-x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - x .}$$

(b) Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $-x \in \mathbb{R}_-^*$

et donc $f(-x) \in \mathbb{R}_-^*$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* , \quad f(x) - x < 0}$$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) - u_n < 0$

donc $u_{n+1} - u_n < 0$

La suite (u_n) est décroissante.

(8) La suite (u_n) est minorée par 0 (question 6) et décroissante (question 7)

Elle est donc convergente et on note $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$.

• La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, on a donc

$$\ell = f(\ell).$$ (on a $\ell = 0$ solution évidente. On cherche d'éventuelles autre solution $\ell \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \ell = \ln\left(\frac{e^{\ell}-1}{\ell}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{\ell} = \frac{e^{\ell}-1}{\ell}$$

$$\Leftrightarrow \ell e^{\ell} - e^{\ell} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow g(\ell) = 0$$ Or $g(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$.

L'unique solution est donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$

(9) $v_n = f(-u_n) = \ln\left(\frac{1-e^{-u_n}}{u_n}\right) = f(u_n) - u_n$

$$= u_{n+1} - u_n.$$

On a donc $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(u_n) converge donc $\sum_{n \geq 0} u_{n+1} - u_n$ converge.

Ainsi $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \ell - u_0 = -u_0$.

(10) (a)
```
function y = f(x)
    if x = 0 then
        y = 0
    else
        y = log((exp(x) - 1)/x)
endfunction.
```

(b)
```
u = 1   (initialisation).
while u > 10^(-3) do
    u = f(u)
end.
```

Exercice 31 (*)

(1) $C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 10 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 10 & -4 \\ 0 & 10 & -4 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1$ $\qquad$ $L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_1$

$C \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

Un des pivots dans la méthode de Gauss est nulle donc la matrice C n'est pas inversible

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad L_1 \leftarrow 4L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$

$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad L_1 \leftarrow 5L_3 - 2L_1$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \underbrace{\begin{pmatrix} -4/6 & 2/6 & 5/6 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}}_{M^{-1}}$ $\quad L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$, $L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$

(3) (E_λ) : $\begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 \\ 4x - (2+\lambda)y = 0 \end{cases}$

(a)

$\iff \begin{cases} 4x - (2+\lambda)y = 0 \\ (1-\lambda)x + y = 0 \end{cases}$ $\quad L_1 \leftrightarrow L_2$

$\iff \begin{cases} 4x - (2+\lambda)y = 0 \\ (4 + (1-\lambda)(2+\lambda))y = 0 \end{cases}$ $\quad L_2 \leftarrow 4L_2 - (1-\lambda)L_1$

Le système n'est pas de Cramer si et seulement si $4 + (1-\lambda)(2+\lambda) = 0$

$\iff 4 + 2 - 2\lambda + \lambda - \lambda^2 = 0$

$\iff 6 - \lambda - \lambda^2 = 0$

$\iff \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$\Delta = 25$

$\lambda_1 = \frac{-1-5}{2} = -3$ et $\lambda_2 = \frac{-1+5}{2} = 2$.

(b)

Pour $\lambda \neq -3$ ou 2 le système est de Cramer donc l'unique solution est $\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}$.

$\underline{\lambda = -3}$

(E_{-3}) : $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\iff x = -\frac{1}{4}y$.

$\mathcal{S} = \{(-\frac{1}{4}y, y), y \in \mathbb{R}\}$.

$\underline{\lambda = 2}$

(E_2) : $\begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$\iff x = y$.

$\mathcal{S} = \{(y, y), y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3B

1 (a) $AX_n = X_{n+1}$

(b) Récurrence classique : $X_{n+1} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$.

2 (a) (E_λ) : $\begin{cases}(3-\lambda)x - y + z = 0\\ x + (2-\lambda)y = 0\\ y + (1-\lambda)z = 0\end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + (2-\lambda)y = 0\\ (3-\lambda)x - y + z = 0\\ y + (1-\lambda)z = 0\end{cases}$ $L_2 \leftrightarrow L_1$

$\iff \begin{cases} x + (2-\lambda)y = 0\\ -y - (3-\lambda)(2-\lambda)y + z = 0\\ y + (1-\lambda)z = 0\end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_2 - (3-\lambda)L_1$ | $(3-\lambda)(2-\lambda) = 6 - 5\lambda + \lambda^2$

$\iff \begin{cases} x + (2-\lambda)y = 0\\ y + (1-\lambda)z = 0\\ (-\lambda^2 + 5\lambda - 7)y + z = 0\end{cases}$ $L_3 \leftrightarrow L_2$

$\iff \begin{cases} x + (2-\lambda)y = 0\\ y + (1-\lambda)z = 0\\ \left(1 - (1-\lambda)(-\lambda^2+5\lambda-7)\right)z = 0\end{cases}$ $L_3 \leftarrow L_3 - (-\lambda^2 + 5\lambda - 7)L_2$

Le système (E_λ) n'est pas de Cramer ssi $1 - (1-\lambda)(-\lambda^2 + 5\lambda - 7) = 0$

$\iff 1 + \lambda^2 - 5\lambda + 7 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda = 0$

$\iff -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0$.

~~2 est une~~ ra

On vérifie que $(2-\lambda)^3 = 8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$.

Donc le système (E_λ) n'est pas de Cramer ssi $\lambda = 2$.

(b) Pour $\lambda = 2$ (E_2) : $\begin{cases} x = 0\\ y - z = 0\\ 0 = 0\end{cases} \iff \begin{cases} x = 0\\ y = z\end{cases}$.

$\mathcal{S} = \{(0; z; z) \quad z \in \mathbb{R}\}$.

③ (a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

(b) les matrices $2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont commutatives.

$$T^n = (2I + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I)^{n-k} N^k$$

On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$N^3 = 0$.

$$= \binom{n}{0} (2I)^n + \binom{n}{1} (2I)^{n-1} N + \binom{n}{2} (2I)^{n-2} N^2.$$

$$= 2^n I + n 2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2$$

$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!}$

donc $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

(c) On calcule $T = P^{-1}AP$

On a alors $A = PTP^{-1}$

et $A^n = PT^nP^{-1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & (n^2-n)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^n + n2^{n-1} + (n^2-n)2^{n-3} & 2^{n+1} - (n^2-n)2^{n-3} & -2^n + (n^2-n)2^{n-3} \\ 2^n + n2^{n-1} & -n2^{n-1} & n2^{n-1} \\ 2^n & -2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

Or $-2^n + n2^{n-1} + (n^2-n)2^{n-3} = 2^{n-3}\left(-8 + 4n + n^2 - n\right) = \left(-8 + 3n + n^2\right)2^{n-3}$

$$T^n P^{-1} = 2^{n-3} \begin{pmatrix} -8+3n+n^2 & 16-n^2+n & -8+n^2-n \\ 8+4n & -4n & 4n \\ 8 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$P T^n P^{-1} = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8+4n & -4n & 4n \\ 3n+n^2 & 8-n^2+n & n^2-n \\ -n+n^2 & -n^2+5n & 8+n^2-5n \end{pmatrix}$$

$$A^n = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 8+4n & -4n & 4n \\ 3n+n^2 & 8-n^2+n & n^2-n \\ -n+n^2 & -n^2+5n & 8+n^2-5n \end{pmatrix}$$

(d) On en déduit $X_n = A^n X_0$.

$$X_n = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 8+4n \\ 3n+n^2 \\ -n+n^2 \end{pmatrix}$$

Donc $u_n = 2^{n-3}(8+4n) = 2^n + n2^{n-1}$

$v_n = 2^{n-3}(3n+n^2)$

$w_n = 2^{n-3}(-n+n^2)$.

Exercice 4A (**)

(1) On répète n fois une épreuve de Bernoulli ayant comme probabilité de succès $\frac{1}{2}$.

$X \sim \mathcal{B}(n ; \frac{1}{2})$ $\qquad E(X) = \frac{n}{2} \qquad V(X) = \frac{n}{4}$.

(2) tirer une boule blanche pour la première fois au $k^{\text{ème}}$ tirage signifie : On a tiré $(k-1)$ boules noires puis une boule blanche. Les probabilités étant indépendantes

$$P(Y=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

et $P(Y=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

(3) On a $\sum_{k=0}^{n} P(Y=k) = P(Y=0) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$= 1.$$

(4) On pose $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{k} = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)}$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1}$$

et $f'(x) = \frac{-(n+1)x^{n}(1-x) \cancel{+} (1-x^{n+1})}{(1-x)^{2}}$

$$= \frac{(n+1)x^{n+1} - (n+1)x^{n} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^{2}}$$

$$= \frac{n x^{n+1} - (n+1)x^{n} + 1}{1-x^{2}}$$

Or $\sum_{k=1}^{n} k x^{k} = x f'(x) = \frac{n x^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^{2}}$

(5) $E(Y) = \sum_{k=1}^{n} k P(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$

$$= \frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2}}$$

$$= n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - 2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 2.$$

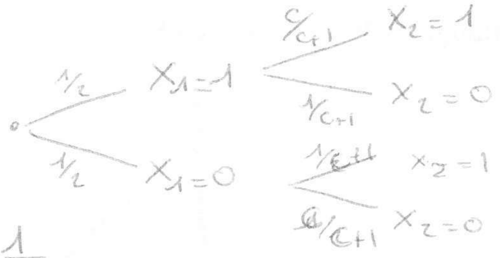
Partie 2 :

① Z_p représente le nombre de boules blanches tirés lors de p tirages.

② $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ Loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

$E(X_1) = \frac{1}{2}$.

③ $X_2(\Omega) = \{0;1\}$.



$P(X_2=1) = \frac{1}{2} \times \frac{c}{c+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{c+1}$

$= \cancel{\frac{2c + c+1}{4(c+1)}}\ \frac{1}{2} \times \left(\frac{c+1}{c+1}\right) = \frac{1}{2}$.

$P(X_2=0) = 1 - P(X_2=1) = \frac{1}{2}$.

Donc $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

④ X_1 et X_2 sont 2 lois de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$

Donc $Z_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2; \frac{1}{2})$.

⑤ $Z_p(\Omega) = [\![0; p]\!]$

⑥ (a) $Z_p = k$ signifie qu'on a tiré k boules blanches.

Il y a donc maintenant $kc+1$ boules blanches dans l'urne.

Il y a $(p-k)c+1$ boules rouges

Il y a alors dans l'urne $pc+2$ boules

donc $P(X_{p+1}=1 \mid Z_p=k) = \frac{kc+1}{pc+2}$.

(b) $P(X_{p+1}) = \sum_{k=0}^{p} P(Z_p=k)\, P(X_{p+1}=1 \mid Z_p=k)$

$= \sum_{k=0}^{p} P(Z_p=k) \left(\frac{kc+1}{cp+2}\right)$.

$= \frac{1}{2+pc}\left(\sum_{k=0}^{p} P(Z_p=k)\right) + \frac{c}{2+pc} \sum_{k=0}^{p} k P(Z_p=k)$

Or $\sum_{k=0}^{p} P(Z_p = k) = 1$ et $\sum_{k=0}^{p} k P(Z_p = k) = E(Z_p)$.

On a donc $P(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$

k) On montre par récurrence

$\mathcal{P}_p$: { X_p est une variable de Bernoulli de paramètre $1/2$ }.

<u>Initialisation</u>

$X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$ → OK

<u>Hérédité</u> On suppose que $\forall k \leq p$, $\mathcal{P}_k$ est vraie.
c'est à dire que $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots \mathcal{P}_p$ sont vraies pour un certain rang p.

<u>Dans ce cas</u>, $Z_p \hookrightarrow \mathcal{B}(p, \frac{1}{2})$

et donc $E(Z_p) = \frac{p}{2}$.

On a alors $P(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + \frac{cp}{2}}{2(1 + \frac{cp}{2})} = \dfrac{1}{2}$.

et $P(X_{p+1} = 0) = \dfrac{1}{2}$.

Donc $X_{p+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Ainsi $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie et donc la suite $(\mathcal{P}_p)$ est héréditaire.

On a alors d'après 1(b).

$$u_n = n + b - s + \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}\left(u_1 - (1+b-s)\right)$$

avec $u_1 = \frac{b}{s}$.

donc $$u_n = n + b - s + \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}\left(\frac{b}{s} - (1+b-s)\right).$$

$$P(B_n) = \frac{1}{s}\left(b + n - n - b + s - \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}\left(\frac{b}{s} - (1+b-s)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{s}\left(s - \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}\left(\left(\frac{b}{s}\right) - (1+b-s)\right)\right).$$

(d) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} n+b-s = +\infty$$

donc $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 1.}$$

A l'infini, on tirera presque sûrement une boule blanche (toutes les boules noires auront disparu).

Exercice 4B

1. (a) $v_{n+1} = \alpha(n+1) + \beta$

$v_n = \alpha n + \beta$

On cherche α et β tels que $s v_{n+1} = (s-1)v_n + b + n$

$\Leftrightarrow s(\alpha(n+1) + \beta) = (s-1)(\alpha n + \beta) + b + n$

$\Leftrightarrow \cancel{s\alpha n} + s\alpha + \cancel{s\beta} - s\alpha n - \cancel{s\beta} + \alpha n + \beta - b - n$

$\Leftrightarrow (\alpha - 1)n + s\alpha \cancel{+ s\beta} + \beta - b = 0$

Par identification, on a

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ s\alpha + \beta - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = b - s. \end{cases}$$

On a $(v_n)_{n \geq 1} \in A$ ssi $\alpha = 1$ et $\beta = b - s$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$y_{n+1} = x_{n+1} - v_{n+1}$$

$$= \frac{s-1}{s} x_n + \frac{b}{s} + \frac{n}{s} - (n+1) - b + s$$

$$= \frac{s-1}{s}(x_n - v_n) + \frac{s-1}{s} v_n + \frac{b}{s} + \frac{n}{s} - (n+1) - b + s$$

$$= \frac{s-1}{s} y_n + \left(1 - \frac{1}{s}\right)(n + (b-s)) + \frac{b+n}{s} - (n+1) - b + s$$

$$= \frac{s-1}{s} y_n + n + b - s - \frac{n}{s} - \frac{b}{s} + 1 + \frac{b+n}{s} - (n+1) - b + s$$

$$= \left(\frac{s-1}{s}\right) y_n \quad \text{(Tout se simplifie)}.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$y_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1} y_1 \quad \text{et} \quad y_1 = x_1 - v_1 = x_1 - (1 + b - s)$$

donc $y_n = \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}(x_1 - (1 + b - s))$.

et $x_n = v_n + y_n$

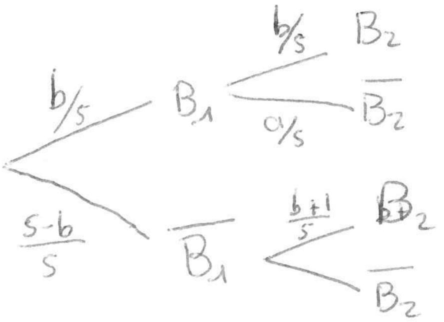
$$x_n = n + b - s + \left(\frac{s-1}{s}\right)^{n-1}(x_1 - (1 + b - s)).$$

(2) (a) B_1 : " La première boule tirée est blanche".

$\boxed{P(B_1) = \frac{b}{s}}$ $\quad X_1(\Omega) = \{0 ; 1\}$. $\quad P(X_1 = 1) = \frac{b}{s}$

donc $\boxed{u_1 = E(X_1) = \frac{b}{s}}$

(b)



Formule des probabilités totales.

$$P(B_2) = P_{B_1}(B_2) \times P(B_1) + P_{\overline{B_1}}(B_2) \times P(\overline{B_1})$$

$$= \left(\frac{b}{s}\right)^2 + \frac{s-b}{s} \times \frac{b+1}{s}$$

$$= \frac{b^2 + sb + s - b^2 - b}{s^2}$$

$$= \frac{b+1}{s} - \frac{b}{s^2}$$

$$= \frac{b+1-u_1}{s} \quad \left(\text{car } u_1 = \frac{b}{s}\right).$$

(c) Si $X_n = k$, cela signifie qu'on a tiré k boules blanches $n-k$ boules noire.
Il y a donc $b+n-k$ boules blanches dans l'urne.
(On a $n \leq a$ donc $b+n-k \leq b+a \leq s$).

$$\boxed{P_{X_n = k}(B_{n+1}) = \frac{b+n-k}{s}}$$

On a d'après la formule des probabilités totales.

$$P(B_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k)\, P_{X_n = k}(B_{n+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) \left(\frac{b+n-k}{s}\right)$$

$$= \frac{1(b+n)}{s} \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) - \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{n} k\, P(X_n = k).$$

$$= \frac{b+n}{s} - \frac{1}{s} E(X_n)$$

$$= \frac{b+n-u_n}{s}$$

on rappelle
$\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$
$\sum_{k=0}^{n} k\, P(X_n = k) = E(X_n)$

(d) $\underline{n > a}$ et $k \in [0 ; n-a-1]$ cela signifie que l'on a "$(X_n = k)$"

tiré moins de $n-a-1$ boules blanches -

c'est à dire plus de $a+1$ $(n-(n-a-1))$ boules rouges

$\underline{\text{impossible}}$: $(X_n = k) = \emptyset$

. Si $k \in [n-a, n]$ on a $P_{X_n=k}(B_{n+1}) = \dfrac{b+n-k}{s}$ (Raisonnement précédent)

$$P(B_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} P_{X_n=k}(B_{n+1})\, P(X_n = k)$$

$$= \sum_{k=n-a}^{n} P_{X_n=k}(B_{n+1})\, P(X_n = k)$$

$$= \frac{b+n}{s}\left(\sum_{k=n-a}^{n} P(X_n=k)\right) + \left(-\frac{1}{s}\right)\sum_{k=n-a} k\, P(X_n=k)$$

$$= \frac{b+n-u_n}{s}$$ car $\displaystyle\sum_{k=n-a}^{n} P(X_n=k) = \sum_{k=0}^{n} P(X_n=k) = 1$

et $\displaystyle\sum_{k=n-a}^{n} k\, P(X_n=k) = \sum_{k=0}^{n} k\, P(X_n=k) = E(X_n)$

(3) "$X_{n+1} = k$" signifie qu'on a tiré k boules blanches au cours des $n+1$ premiers tirages. Il n'y a que 2 possibilités :

-> Soit k boules blanches avaient étés tirés au tirage précédent et on tire une boule noire au $n+1$ ème tirage.

-> Soit $(k-1)$ boules blanches avaient été tirés au tirage précédent et on tire une boule blanche au $n+1$ ème tirage.

$$(X_{n+1} = k) = \left((X_n = k) \cap \overline{B_{n+1}}\right) \cup \left((X_n = k-1) \cap B_{n+1}\right)$$

$$P(X_{n+1} = k) = P\left((X_n = k) \cap \overline{B_{n+1}}\right) + P\left(X_n = k-1 \cap B_{n+1}\right)$$

$$= P_{X_n=k}(\overline{B_{n+1}})\, P(X_n = k) + P_{X_n=k-1}(B_{n+1})\, P(X_n = k-1)$$

$$= \frac{a-n+k}{s} P(X_n = k) + \frac{b+n-k+1}{s} P(X_n = k-1)$$

• $(k = n+1)$ $X_{n+1} = n+1$ Probabilité de n'avoir tiré que des boules blanches.

$$P(X_{n+1} = n+1) = P(X_n = n) \times P_{X_n = n}(B_{n+1})$$
$$= \frac{b}{s} \times P(X_n = n).$$

On obtient la même chose avec la formule $\left((X_n = n+1) = \emptyset\right)$.

$(k = n-a)$ "$X_{n+1} = n-a$" signifie on a tiré $n-a$ boules blanches c'est à dire ~~n~~ $a+1$ boules noires impossibles

et $\frac{a-n+n-a}{s} = 0$ et $P(\underbrace{X_n = n-a-1}_{\text{évènement impossible}}) = 0$.

On retrouve $\boxed{P(X_{n+1} = n-a) = 0}$

• $\forall k \in [1, n-a-1]$ $\left.\begin{array}{l} P(X_n = k) = 0 \\ P(X_n = k-1) = 0 \end{array}\right)$ Donc $\boxed{P(X_{n+1} = k) = 0}$

(b) $u_{n+1} = E(X_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} k\, P(X_{n+1} = k)$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{a-n+k}{s}\right) P(X_n = k) + k\left(\frac{b+n-k+1}{s}\right) P(X_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a-n+k}{s}\right) k\, P(X_n = k) + \sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{b+n-k+1}{s}\right) P(X_n = k-1)$$

$$= \frac{a-n}{s} E(X_n) + \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{n} k^2 P(X_n = k) + \sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{b+n-k+1}{s}\right) P(X_n = k-1)$$

On calcule

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{b+n-k+1}{s}\right) P(X_n = k-1) = \sum_{j=0}^{n} (j+1)\left(\frac{b+n-j}{s}\right) P(X_n = j)$$

$j = k-1$

$$= \frac{b+n}{s} E(X_n) + \frac{b+n}{s} - \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{n} j^2 P(X_n = j) - \frac{1}{s} E(X_n$$

Finalement $u_{n+1} = \frac{a-n}{s} u_n + \frac{b+n}{s} u_n - \frac{1}{s} u_n + \frac{b+n}{s}$

$$(\Rightarrow) \boxed{s\, u_{n+1} = (s-1) u_n + b + n}.$$